Dipartimento di Scienze Statistiche Università di Bologna

Matematica finanziaria aa 2013-2014

lezione 22: 26 marzo 2014

professor Daniele Ritelli

www.unibo.it/docenti/daniele.ritelli

Covarianza

Se X e Y sono variabili aleatorie a media finita, allora la loro **covarianza** è definita da

$$\sigma_{X,Y} = \mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right]$$

Covarianza

Se X e Y sono variabili aleatorie a media finita, allora la loro **covarianza** è definita da

$$\sigma_{X,Y} = \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$

1. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
2. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
3. $\mathrm{Cov}(X,X) = \sigma_X^2$
4. se X è costante ($\sigma_X = 0$) allora $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$
5. $\mathrm{Cov}(aX + bY, Z) = a\mathrm{Cov}(X,Z) + b\mathrm{Cov}(Y,Z)$

La varianza non è un operatore lineare, quindi le due quantità

$$\mathrm{Var}(aX + bY) \quad \text{e} \quad a\mathrm{Var}(X) + b\mathrm{Var}(Y)$$

non sono uguali, infatti:

La varianza non è un operatore lineare, quindi le due quantità

$$\mathrm{Var}(aX + bY) \quad \mathrm{e} \quad a\mathrm{Var}(X) + b\mathrm{Var}(Y)$$

non sono uguali, infatti:

$$\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab\mathrm{Cov(X, Y)}$$

Coefficiente di correlazione

Per prima cosa osserviamo che vale la disuguaglianza

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y$$

Coefficiente di correlazione

Per prima cosa osserviamo che vale la disuguaglianza

$$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y$$

Si ha uguaglianza nelle particolari situazioni in cui X oppure Y è costante o se esistono due numeri a, $b \in \mathbb{R}$ per cui $Y = aX + b$

Coefficiente di correlazione

Per prima cosa osserviamo che vale la disuguaglianza

$$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y$$

Si ha uguaglianza nelle particolari situazioni in cui X oppure Y è costante o se esistono due numeri a, $b \in \mathbb{R}$ per cui $Y = aX + b$

Definizione

Se X e Y hanno media e varianza finite il loro coefficiente di correlazione è

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Coefficiente di correlazione

Per prima cosa osserviamo che vale la disuguaglianza

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \le \sigma_X \sigma_Y$$

Si ha uguaglianza nelle particolari situazioni in cui X oppure Y è costante o se esistono due numeri a, $b \in \mathbb{R}$ per cui $Y = aX + b$

Definizione

Se X e Y hanno media e varianza finite il loro coefficiente di correlazione è

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Si ha $-1 \le \rho_{X,Y} \le 1$

Variabili non correlate

Due variabili aleatorie sono dette **non correlate** se $\rho_{X,Y} = 0$.

Sono dette **correlate positivamente** se $\rho_{X,Y} = 1$

Sono dette **correlate negativamente** se $\rho_{X,Y} = -1$

Teoria del Portafoglio

Roman: Mathematical Finance, Springer 2004 Cap. 2

Per semplicità considereremo un modello con due soli tempi $t = 0$ tempo iniziale e $t = T$ tempo finale.

Ogni titolo $\mathfrak{a}_i$ ha un valore iniziale $V_i(0)$ e un valore finale $V_i(T)$

Un **Portafoglio** è una collezione di $n \in \mathbb{N}$ titoli $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ posseduti con una determinata proporzione.

Formalmente si tratta di una n-upla ordinata di numeri reali

$$\Pi = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$$

in cui ϑ_i è il numero di unità possedute del titolo $\mathfrak{a}_i$

$\vartheta_i < 0$ è una **short position**: cioè la vendita del titolo con l'aspettativa che il suo prezzo cali nel futuro

$\vartheta_i < 0$ è una **short position**: cioè la vendita del titolo con l'aspettativa che il suo prezzo cali nel futuro

$\vartheta_i > 0$ è una **long position**: cioè l'acquisto del titolo con l'aspettativa che il suo prezzo aumenti nel futuro

$\vartheta_i < 0$ è una **short position**: cioè la vendita del titolo con l'aspettativa che il suo prezzo cali nel futuro

$\vartheta_i > 0$ è una **long position**: cioè l'acquisto del titolo con l'aspettativa che il suo prezzo aumenti nel futuro

Il **peso** w_i del titolo $\mathfrak{a}_i$ è la percentuale del titolo in portafoglio al tempo $t = 0$

$$\boldsymbol{w_i = \frac{\vartheta_i V_i(0)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \vartheta_j V_j(0)}}$$

$\vartheta_i < 0$ è una **short position**: cioè la vendita del titolo con l'aspettativa che il suo prezzo cali nel futuro

$\vartheta_i > 0$ è una **long position**: cioè l'acquisto del titolo con l'aspettativa che il suo prezzo aumenti nel futuro

Il **peso** w_i del titolo $\mathfrak{a}_i$ è la percentuale del titolo in portafoglio al tempo $t = 0$

$$\boldsymbol{w_i = \frac{\vartheta_i V_i(0)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \vartheta_j V_j(0)}}$$

Dunque $\boldsymbol{w_1 + \cdots + w_n = 1}$

Rendimento

Il rendimento R_i del titolo $\mathfrak{a}_i$ è definito dall'equazione

$$V_i(T) = V_i(0)(1 + R_i) \implies R_i = \frac{V_i(T) - V_i(0)}{V_i(0)}$$

Rendimento

Il rendimento R_i del titolo $\mathfrak{a}_i$ è definito dall'equazione

$$V_i(T) = V_i(0)(1 + R_i) \implies R_i = \frac{V_i(T) - V_i(0)}{V_i(0)}$$

Siccome il valore di un titolo al tempo T è una variabile aleatoria, tale è il suo rendimento R_i. Ha senso quindi considerare valore atteso e varianza del rendimento. Il rendimento atteso del titolo $\mathfrak{a}_i$ si denota con

$$\mu_i = \mathbb{E}(R_i)$$

Il rendimento del portafoglio Π è definito come la somma pesata dei rendimenti di ciascun titolo

$$\boldsymbol{R} = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{w_i R_i}$$

Il rendimento del portafoglio Π è definito come la somma pesata dei rendimenti di ciascun titolo

$$\boldsymbol{R = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i}$$

Ad esempio se un portafoglio è costituito da due soli titoli con pesi 0,25 e 0,75 e rendimenti dell' 8% e del 4% il rendimento del portafoglio è

$$0,25 \times 0,08 + 0,75 \times 0,04 = 0,05 = 5\%$$

Per linearità il valore atteso del rendimento dell'intero portafoglio Π è

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{w_i \mu_i}$$

Rischio

La varianza del rendimento del titolo $\mathfrak{a}_i$

$$\sigma_i^2 = \mathrm{Var}(R_i)$$

è chiamata il rischio del titolo $\mathfrak{a}_i$. Come misura del rischio si può usare anche la deviazione standard

Rischio

La varianza del rendimento del titolo $\mathfrak{a}_i$

$$\sigma_i^2 = \mathrm{Var}(R_i)$$

è chiamata il rischio del titolo $\mathfrak{a}_i$. Come misura del rischio si può usare anche la deviazione standard

Siccome i rendimenti dei singoli titoli in portafoglio non sono in generale indipendenti, la varianza del rendimento del portafoglio è

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \mathrm{Cov}(R_i, R_j) \qquad (\sigma^2)$$

ove $\mathrm{Cov}(R_i, R_j)$ è la covarianza di R_i e R_j.

La formula (σ^2) è conseguenza della relazione

$$\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$$

La formula (σ^2) è conseguenza della relazione

$$\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$$

Possiamo riscrivere (σ^2) usando i coefficienti di correlazione ($\rho_{R_i R_j} = \rho_{ij} = \frac{\mathrm{Cov}(R_i R_j)}{\sigma_i \sigma_j}$) come

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

Ricapitoliamo

Rendimento atteso

Il **Rendimento atteso** $\boldsymbol{\mu}$ di un portafoglio è il valore atteso del rendimento del portafoglio

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{w}_i \boldsymbol{R}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{w}_i \boldsymbol{\mu}_i$$

Ricapitoliamo

Rendimento atteso

Il **Rendimento atteso** $\boldsymbol{\mu}$ di un portafoglio è il valore atteso del rendimento del portafoglio

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{w_i R_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{w_i \mu_i}$$

Rischio

Il **Rischio** di un portafoglio è la varianza del rendimento del portafoglio

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}$$

Un titolo è **rischioso** se il suo rischio σ_i^2 è positivo

È **privo di rischio** se il suo rischio è zero

Salvo avviso contrario, supporremo che tutti i titoli in portafoglio siano rischiosi.

Ottimizzazione vincolata

$$\sup f(x, y) \quad \text{sub} \quad g(x, y) = 0$$

$$\inf f(x, y) \quad \text{sub} \quad g(x, y) = 0$$

Ottimizzazione vincolata

$$\sup f(x, y) \quad \text{sub} \quad g(x, y) = 0$$

$$\inf f(x, y) \quad \text{sub} \quad g(x, y) = 0$$

Esempio

Massimi e minimi di $f(x, y) = x + 2y$ con vincolo $x^2 + y^2 = 1$

Moltiplicatori di Lagrange

Sia

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathcal{R} \mid \; w\,(x, y) = 0\} \text{ con } \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) \neq 0$$

Moltiplicatori di Lagrange

Sia

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathcal{R} \mid \ w\,(x, y) = 0\} \text{ con } \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) \neq 0$$

Supponiamo che $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}$ sia un punto di massimo o di minimo relativo per la restrizione di f ad $\mathcal{M}$.

Moltiplicatori di Lagrange

Sia

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathcal{R} \mid \ w\,(x, y) = 0\} \text{ con } \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) \neq 0$$

Supponiamo che $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}$ sia un punto di massimo o di minimo relativo per la restrizione di f ad $\mathcal{M}$. Allora esiste un numero reale λ, detto moltiplicatore di Lagrange, tale che:

Moltiplicatori di Lagrange

Sia

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathcal{R} \mid \; w\,(x, y) = 0\} \text{ con } \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) \neq 0$$

Supponiamo che $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}$ sia un punto di massimo o di minimo relativo per la restrizione di f ad $\mathcal{M}$. Allora esiste un numero reale λ, detto moltiplicatore di Lagrange, tale che:

$$\begin{cases} \boldsymbol{f_x\,(x_0, y_0) - \lambda w_x\,(x_0, y_0) = 0,} \\ \boldsymbol{f_y\,(x_0, y_0) - \lambda w_y\,(x_0, y_0) = 0.} \end{cases} \tag{L}$$

Il teorema del moltiplicatore esprime il fatto che, in corrispondenza di un punto estremante, la Lagrangiana ha un punto stazionario, che viene determinato legando a sistema (L) con l'equazione del vincolo, vale a dire:

Il teorema del moltiplicatore esprime il fatto che, in corrispondenza di un punto estremante, la Lagrangiana ha un punto stazionario, che viene determinato legando a sistema (L) con l'equazione del vincolo, vale a dire:

$$\begin{cases} \boldsymbol{f_x(x_0, y_0) - \lambda w_x(x_0, y_0) = 0,} \\ \boldsymbol{f_y(x_0, y_0) - \lambda w_y(x_0, y_0) = 0,} \\ \boldsymbol{w(x_0, y_0) = 0.} \end{cases}$$

Il teorema del moltiplicatore esprime una condizione solo necessaria. Una condizione sufficiente affinché un punto stazionario della Lagrangiana sia un massimo è:

Il teorema del moltiplicatore esprime una condizione solo necessaria. Una condizione sufficiente affinché un punto stazionario della Lagrangiana sia un massimo è:

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{L_{xx}} & \boldsymbol{L_{xy}} & \boldsymbol{w_x} \\ \boldsymbol{L_{xy}} & \boldsymbol{L_{yy}} & \boldsymbol{w_y} \\ \boldsymbol{w_x} & \boldsymbol{w_y} & \mathbf{0} \end{pmatrix} > \mathbf{0}$$

Il teorema del moltiplicatore esprime una condizione solo necessaria. Una condizione sufficiente affinché un punto stazionario della Lagrangiana sia un massimo è:

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{L_{xx}} & \boldsymbol{L_{xy}} & \boldsymbol{w_x} \\ \boldsymbol{L_{xy}} & \boldsymbol{L_{yy}} & \boldsymbol{w_y} \\ \boldsymbol{w_x} & \boldsymbol{w_y} & \mathbf{0} \end{pmatrix} > \mathbf{0}$$

la condizione di minimo è:

Il teorema del moltiplicatore esprime una condizione solo necessaria. Una condizione sufficiente affinché un punto stazionario della Lagrangiana sia un massimo è:

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{L_{xx}} & \boldsymbol{L_{xy}} & \boldsymbol{w_x} \\ \boldsymbol{L_{xy}} & \boldsymbol{L_{yy}} & \boldsymbol{w_y} \\ \boldsymbol{w_x} & \boldsymbol{w_y} & \mathbf{0} \end{pmatrix} > \mathbf{0}$$

la condizione di minimo è:

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{L_{xx}} & \boldsymbol{L_{xy}} & \boldsymbol{w_x} \\ \boldsymbol{L_{xy}} & \boldsymbol{L_{yy}} & \boldsymbol{w_y} \\ \boldsymbol{w_x} & \boldsymbol{w_y} & \mathbf{0} \end{pmatrix} < \mathbf{0}$$

Portafoglio con due titoli: minimizzazione del rischio

Consideriamo il portafoglio più semplice, in cui ci sono solo due titoli $\mathfrak{a}_1$ e $\mathfrak{a}_2$ con rendimenti attesi μ_1 e μ_2 e rischi σ_1^2 e σ_2^2.

Portafoglio con due titoli: minimizzazione del rischio

Consideriamo il portafoglio più semplice, in cui ci sono solo due titoli $\mathfrak{a}_1$ e $\mathfrak{a}_2$ con rendimenti attesi μ_1 e μ_2 e rischi σ_1^2 e σ_2^2. Il rischio è

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 w_1^2 + \sigma_2^2 w_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 w_1 w_2 \tag{R}$$

Portafoglio con due titoli: minimizzazione del rischio

Consideriamo il portafoglio più semplice, in cui ci sono solo due titoli $\mathfrak{a}_1$ e $\mathfrak{a}_2$ con rendimenti attesi μ_1 e μ_2 e rischi σ_1^2 e σ_2^2. Il rischio è

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 w_1^2 + \sigma_2^2 w_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 w_1 w_2 \tag{R}$$

Ci interessa confrontare il rischio del portafoglio con quello dei due titoli presi singolarmente.

Portafoglio con due titoli: minimizzazione del rischio

Consideriamo il portafoglio più semplice, in cui ci sono solo due titoli $\mathfrak{a}_1$ e $\mathfrak{a}_2$ con rendimenti attesi μ_1 e μ_2 e rischi σ_1^2 e σ_2^2. Il rischio è

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 w_1^2 + \sigma_2^2 w_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 w_1 w_2 \tag{R}$$

Ci interessa confrontare il rischio del portafoglio con quello dei due titoli presi singolarmente.

Possiamo supporre che sia $\mathbf{0 < \boldsymbol{\sigma}_1 \leq \boldsymbol{\sigma}_2}$

Ottimo portafoglio

Minimizzare, rispetto a w_1, w_2 la funzione

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 w_1^2 + \sigma_2^2 w_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 w_1 w_2$$

con il vincolo $w_1 + w_2 = 1$.

Ottimo portafoglio

Minimizzare, rispetto a w_1, w_2 la funzione

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 w_1^2 + \sigma_2^2 w_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 w_1 w_2$$

con il vincolo $w_1 + w_2 = 1$.

La lagrangiana del problema è

$$L(w_1, w_2; m) = \sigma_1^2 w_1^2 + \sigma_2^2 w_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 w_1 w_2 - m(w_1 + w_2 - 1)$$

Imponiamo le condizioni di stazionarietà

$$\begin{cases} L_{w_1}(w_1, w_2; m) = 0 \\ L_{w_2}(w_1, w_2; m) = 0 \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$

Imponiamo le condizioni di stazionarietà

$$\begin{cases} L_{w_1}(w_1, w_2; m) = 0 \\ L_{w_2}(w_1, w_2; m) = 0 \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\sigma_1^2 w_1 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 w_2 = m \\ 2\rho\sigma_1\sigma_2 w_1 + 2\sigma_2^2 w_2 = m \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$

Imponiamo le condizioni di stazionarietà

$$\begin{cases} L_{w_1}(w_1, w_2; m) = 0 \\ L_{w_2}(w_1, w_2; m) = 0 \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\sigma_1^2 w_1 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 w_2 = m \\ 2\rho\sigma_1\sigma_2 w_1 + 2\sigma_2^2 w_2 = m \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema troviamo

$$\boldsymbol{w_1 = \frac{\sigma_2 \left(\sigma_2 - \rho\sigma_1\right)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}}, \quad \boldsymbol{w_2 = \frac{\sigma_1 \left(\sigma_1 - \rho\sigma_2\right)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}}$$

$$m = \frac{2\left(1 - \rho^2\right)\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

in cui $\sigma_1 \leq \sigma_2$

Si trova il rischio ottimizzato

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{min}} = \frac{\left(\mathbf{1} - \boldsymbol{\rho}^{\mathbf{2}}\right) \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2} \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{2}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{1}}} \tag{σ^2}$$

Massimizzando σ^2 rispetto a ρ, $\sigma^2_{\min}$ ricordato che assumiamo $\sigma_1 < \sigma_2$ si trova che tale espressione è massimizzata per $-1 < \rho < 1$ in $\rho_{\max} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

Massimizzando σ^2 rispetto a ρ, $\sigma^2_{\min}$ ricordato che assumiamo $\sigma_1 < \sigma_2$ si trova che tale espressione è massimizzata per $-1 < \rho < 1$ in $\rho_{\max} = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$

Infatti la derivata prima è

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^2_{\min}}{\mathrm{d}\rho} = \frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2\left(\rho\sigma_1 - \sigma_2\right)\left(\rho\sigma_2 - \sigma_1\right)}{\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_2\sigma_1\right)^2}$$

Ricordato che assumiamo $\sigma_1 < \sigma_2$ si trova che i punti critici di σ^2 sono

$$\rho_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \rho_2$$

Ricordato che assumiamo $\sigma_1 < \sigma_2$ si trova che i punti critici di σ^2 sono

$$\rho_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \rho_2$$

Il punto critico maggiore non ha significato finanziario in quanto il rapporto $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ è maggiore di 1, mentre il punto critico $\rho_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ è un massimo.

Dunque ρ_1 individua la correlazione critica fra i titoli, quella cioè che genera il massimo rischio nel portafoglio ottimizzato.

Riassumiamo la situazione

Teorema

Supponiamo $0 < \sigma_1 \leq \sigma_2$ e sia $\rho = \rho_{1,2}$ il coefficiente di correlazione. Supponiamo poi che se $\rho = 1$ sia $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Se $s_{\min}$ è il peso del titolo $\mathfrak{a}_2$ che minimizza il rischio allora

$$\boldsymbol{s_{\min} = \frac{\sigma_1(\sigma_1 - \rho\sigma_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}}$$

e

$$\boldsymbol{\sigma_{\min}^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}}$$

1) Se $\rho = 1$ e $\sigma_1 = \sigma_2$ tutti i pesi conducono allo stesso mimino rischio $\sigma_{\min} = \sigma_1 = \sigma_2$

2) La condizione $-1 \leq \rho < \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$ equivale a $0 < s_{\min} < 1$ e in tale situazione il minimo rischio è conseguito senza posizioni short di vendita. Inoltre

$$\sigma^2_{\min} < \min\{\sigma_1, \sigma_2\}$$

Poi $\sigma^2_{\min} = 0 \iff \rho = -1$

3) La condizione $\rho = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$ (fatto salvo il caso $\rho = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2$) è equivalente a $s_{\min} = 0$ nel qual caso $\sigma^2_{\min} = \sigma^2_1$

4) La condizione $\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} < \rho \leq 1$ è equivalente a $s_{\min} < 0$ è quindi necessaria una posizione short di vendita del titolo $\mathfrak{a}_2$ per minimizzare il rischio. Inoltre

$$\sigma^2_{\min} < \min\{\sigma_1, \sigma_2\}$$

Poi $\sigma^2_{\min} = 0 \iff \rho = 1$

Esempio Minimizzare il rischio di un portafoglio costituito da due titoli $\mathfrak{a}_1$ con $\sigma_1 = \frac{1}{4}$ e $\mathfrak{a}_2$ con $\sigma_2 = \frac{1}{2}$ assumendo che $\rho = \frac{1}{4}$

Esempio Minimizzare il rischio di un portafoglio costituito da due titoli $\mathfrak{a}_1$ con $\sigma_1 = \frac{1}{4}$ e $\mathfrak{a}_2$ con $\sigma_2 = \frac{1}{2}$ assumendo che $\rho = \frac{1}{4}$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 w_1^2 + \sigma_2^2 w_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 w_1 w_2 \implies \sigma^2 = \frac{w_1^2}{16} + \frac{w_1 w_2}{16} + \frac{w_2^2}{4}$$

Esempio Minimizzare il rischio di un portafoglio costituito da due titoli $\mathfrak{a}_1$ con $\sigma_1 = \frac{1}{4}$ e $\mathfrak{a}_2$ con $\sigma_2 = \frac{1}{2}$ assumendo che $\rho = \frac{1}{4}$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 w_1^2 + \sigma_2^2 w_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 w_1 w_2 \implies \sigma^2 = \frac{w_1^2}{16} + \frac{w_1 w_2}{16} + \frac{w_2^2}{4}$$

Risolviamo il problema di minimo con Lagrangiana

$$L(w_1, w_2; m) = \frac{w_1^2}{16} + \frac{w_1 w_2}{16} + \frac{w_2^2}{4} - m(w_1 + w_2 - 1)$$

$$\begin{cases} L_{w_1}(w_1, w_2; m) = 0 \\ L_{w_2}(w_1, w_2; m) = 0 \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_{w_1}(w_1, w_2; m) = 0 \\ L_{w_2}(w_1, w_2; m) = 0 \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{w_1}{8} + \dfrac{w_2}{16} = m \\ \dfrac{w_1}{16} + \dfrac{w_2}{2} = m \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
2w_1 + w_2 = 16m \\
w_1 + 8w_2 = 16m \\
w_1 + w_2 = 1
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} 2w_1 + w_2 = 16m \\ w_1 + 8w_2 = 16m \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_1 = \dfrac{112}{15}m \\ w_2 = \dfrac{16}{15}m \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2w_1 + w_2 = 16m \\ w_1 + 8w_2 = 16m \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_1 = \dfrac{112}{15}m \\ w_2 = \dfrac{16}{15}m \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_1 = \dfrac{112}{15}m \\ w_2 = \dfrac{16}{15}m \\ \dfrac{112}{15}m + \dfrac{16}{15}m = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2w_1 + w_2 = 16m \\ w_1 + 8w_2 = 16m \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_1 = \dfrac{112}{15}m \\ w_2 = \dfrac{16}{15}m \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_1 = \dfrac{112}{15}m \\ w_2 = \dfrac{16}{15}m \\ \dfrac{112}{15}m + \dfrac{16}{15}m = 1 \end{cases}$$

Conclusione

$$w_1 = \frac{7}{8}, \quad w_2 = \frac{1}{8}$$

Se con gli stessi valori di rischio consideriamo una correlazione di segno negativo, ad esempio $\rho = -\frac{1}{4}$ otteniamo

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 w_1^2 + \sigma_2^2 w_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 w_1 w_2 \implies \sigma^2 = \frac{w_1^2}{16} - \frac{w_1 w_2}{16} + \frac{w_2^2}{4}$$

che conduce alla scelta ottima

$$w_1 = \frac{3}{4}, \quad w_2 = \frac{1}{4}$$

Se non specifichiamo il valore di $-1 < \rho < 1$ otteniamo il rischio

$$\sigma^2 = \frac{w_1^2}{16} + \frac{w_2^2}{4} + \frac{\rho}{4} w_1 w_2$$

che conduce alla ripartizione ottimale del portafoglio

$$w_1 = \frac{2(2-\rho)}{5-4\rho}, \quad w_2 = \frac{1-2\rho}{5-4\rho}$$

Per vedere se siano possibili posizioni di short sul titolo più rischioso in funzione della correlazione basta risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \dfrac{1-2\rho}{5-4\rho} > 0 \\ -1 < \rho < 1 \end{cases}$$

Per vedere se siano possibili posizioni di short sul titolo più rischioso in funzione della correlazione basta risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \dfrac{1-2\rho}{5-4\rho} > 0 \\ -1 < \rho < 1 \end{cases} \implies -1 < \rho < \frac{1}{2}$$

È interessante studiare l'andamento del rischio minimo in funzione della correlazione

$$\sigma^2 = \frac{w_1^2}{16} + \frac{w_2^2}{4} + \frac{\rho}{4} w_1 w_2$$

con

$$w_1 = \frac{2(2-\rho)}{5-4\rho}, \quad w_2 = \frac{1-2\rho}{5-4\rho}$$

È interessante studiare l'andamento del rischio minimo in funzione della correlazione

$$\sigma^2 = \frac{w_1^2}{16} + \frac{w_2^2}{4} + \frac{\rho}{4} w_1 w_2$$

con

$$w_1 = \frac{2(2-\rho)}{5-4\rho}, \qquad w_2 = \frac{1-2\rho}{5-4\rho}$$

Si trova

$$\sigma^2 = \frac{(1-2\rho)^2}{4(5-4\rho)^2} + \frac{(2-\rho)\rho(1-2\rho)}{2(5-4\rho)^2} + \frac{(2-\rho)^2}{4(5-4\rho)^2}$$

È interessante studiare l'andamento del rischio minimo in funzione della correlazione

$$\sigma^2 = \frac{w_1^2}{16} + \frac{w_2^2}{4} + \frac{\rho}{4} w_1 w_2$$

con

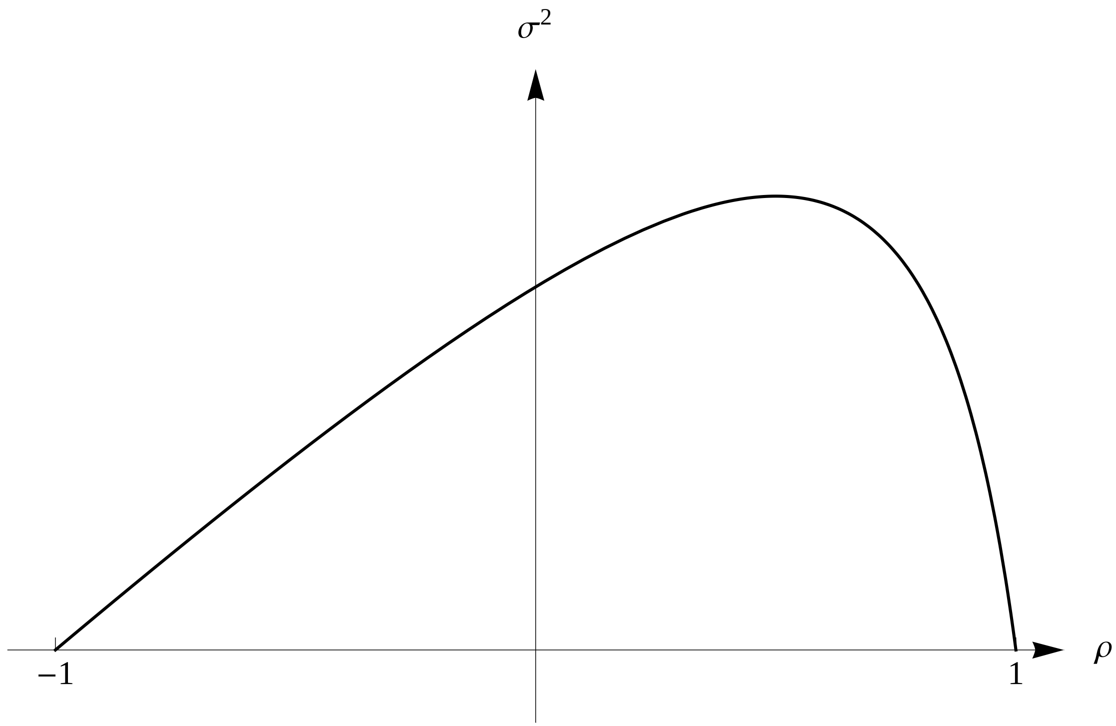
$$w_1 = \frac{2(2-\rho)}{5-4\rho}, \qquad w_2 = \frac{1-2\rho}{5-4\rho}$$

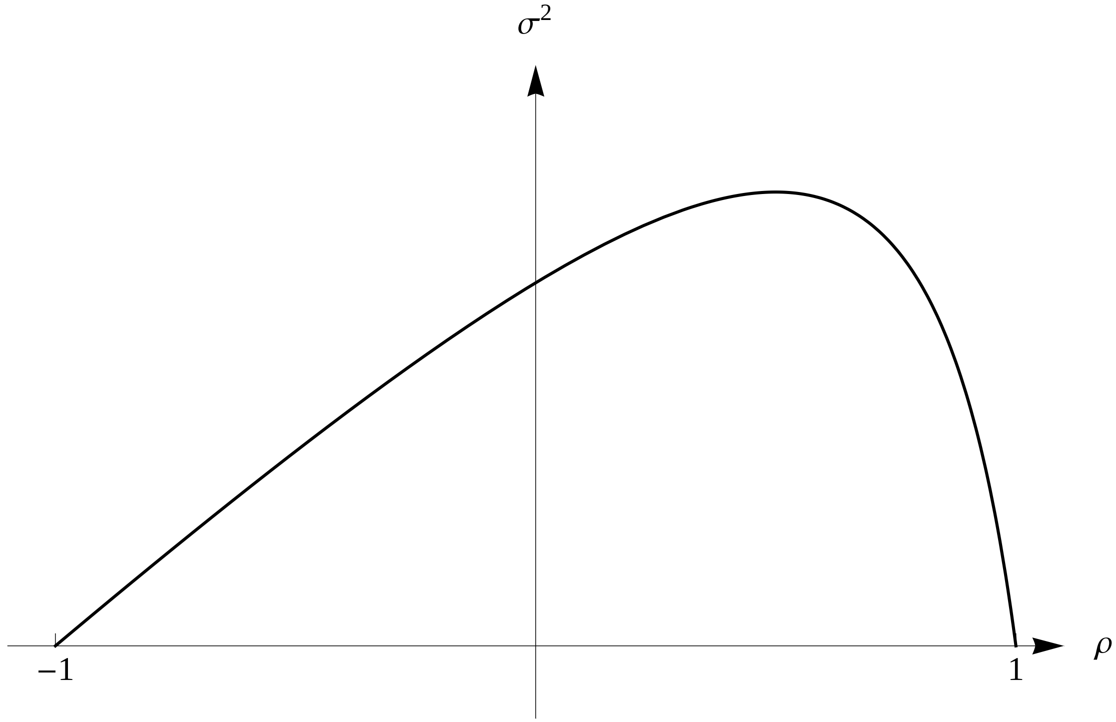
Si trova

$$\sigma^2 = \frac{(1-2\rho)^2}{4(5-4\rho)^2} + \frac{(2-\rho)\rho(1-2\rho)}{2(5-4\rho)^2} + \frac{(2-\rho)^2}{4(5-4\rho)^2}$$

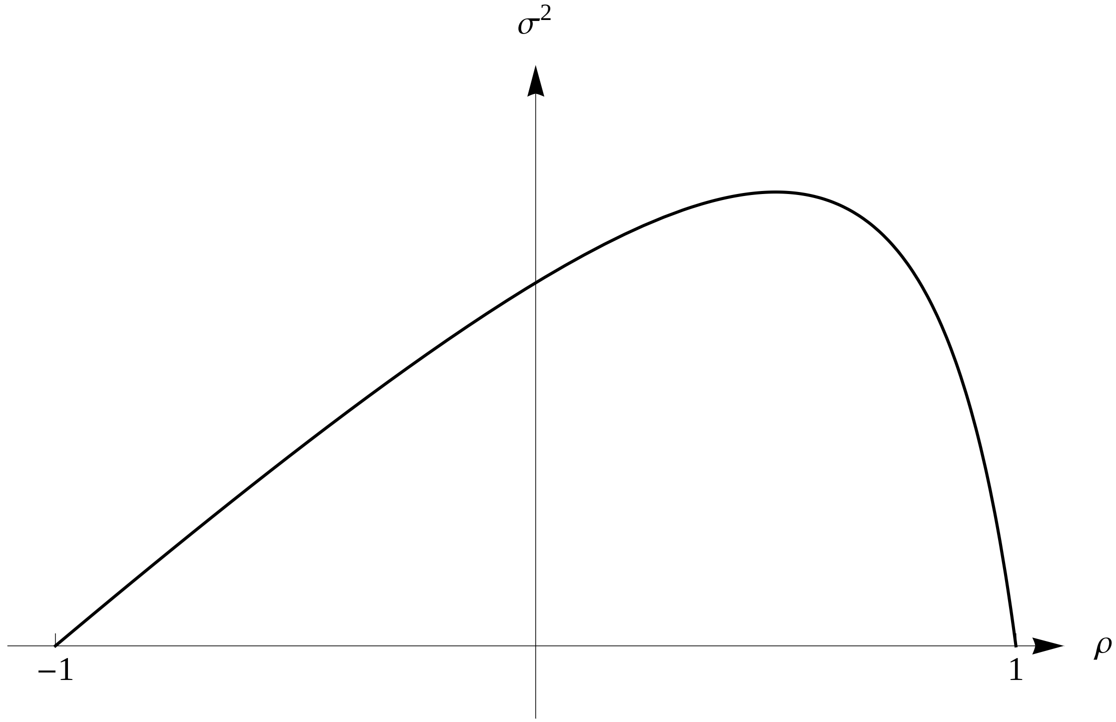
semplificando

$$\sigma^2 = \frac{1-\rho^2}{4(5-4\rho)}$$

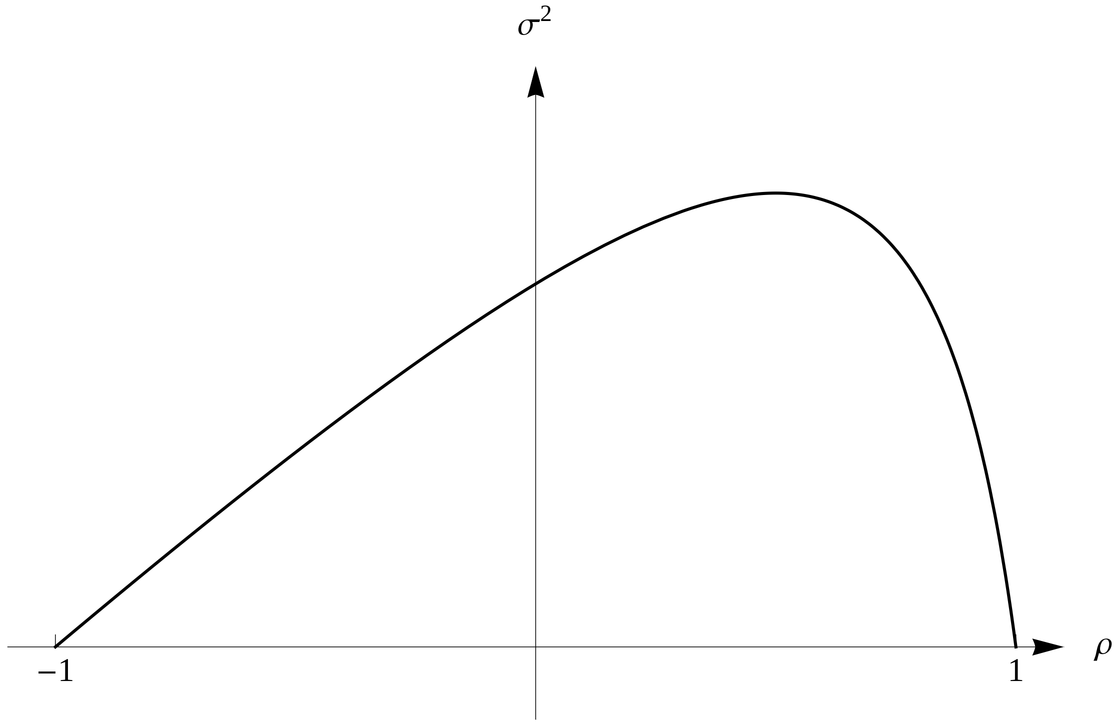

σ^2
ρ
-1
1



$$\frac{\mathrm{d}\sigma^2}{\mathrm{d}\rho} = \frac{2\rho^2 - 5\rho + 2}{2(4\rho - 5)^2}$$



$$\frac{\mathrm{d}\sigma^2}{\mathrm{d}\rho} = \frac{2\rho^2 - 5\rho + 2}{2(4\rho - 5)^2} > 0 \iff -1 < \rho < \frac{1}{2}$$



$$\frac{\mathrm{d}\sigma^2}{\mathrm{d}\rho} = \frac{2\rho^2 - 5\rho + 2}{2(4\rho - 5)^2} > 0 \iff -1 < \rho < \frac{1}{2}$$

$\rho = \dfrac{1}{2}$ è la correlazione che genera il rischio massimo